**Лекция 13 Предел функции одной действительной переменной**

**13.1 Определение конечного предела на языке**  **(по Коши)**

**М13.1.1 Определение.** Пусть . Точка  называется *предельной точкой* множества , если для любого положительного числа в промежутке  имеется бесконечно много точек из .

**Определение.** Промежуток  называется *-окрестностью* (или просто *окрестностью*)точки .

**М13.1.2 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



**М13.1.3** *Замечание.* Иными словами определение предела можно сформулировать так: функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из того, что  попадает в -окрестность точки  следует, что значение функции  попадает в -окрестность точки .

Наличие предела функции при  записывается равенством .

**М13.1.4 Пример.** Покажем, что .

Пусть задано число . Рассмотрим выражение . если взять , то из соотношения  получаем . Таким образом, для любого числа найдено соответствующее число , в нашем примере равное числу .

**М13.1.5 Пример**. Для функции  показать, что .

Пусть задано число . Из определения функции  следует, что функция  равна 1 во всех точках числовой прямой, кроме точки 0, где она равна нулю. Из определения предела, точнее из неравенства  следует, что при рассмотрении неравенства значение  не рассматривается. Рассмотрим выражение при . Значит,  при любом значении  и в качестве  можно взять любое положительное число.

**М13.1.6** *Замечание.* Пример М13.1.4 показывает, что функция не обязательно должна быть определена при . А пример М13.1.5 показывает, что даже если функция определена при , ее значение в этой точке не обязательно должно совпадать со значением ее предела.

**М13.1.7 Определение.** Пусть множество  содержит как угодно большие положительные числа. В этом случае говорят, что множество  имеет своей предельной точкой бесконечность .

**М13.1.8 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



**М13.1.9 Пример.** Покажем, что .

Пусть задано число . Рассмотрим выражение . Знак модуля отбросили потому что при  все значения переменной с какого-то момента будут положительными. Таким образом, неравенство  равносильно неравенству , откуда . Значит, можно взять , и для заданного числа  требуемое число  найдено.

**13.2 Определение бесконечного предела на языке**  **(по Коши)**

**М13.2.1 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



**М13.2.2 Пример.** Покажем, что .

Пусть задано число . Рассмотрим выражение . Тогда , . Значит, можно взять .

**М13.2.3 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого отрицательного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



**М13.2.4 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



**М13.2.5** *Замечание.* Аналогично определяются ,  и .

М13.2.6. Теорема (Критерий Коши конечного предела). Функция  имеет конечный предел при  (или ) тогда и только тогда, когда для  такое, что из  следует .

М13.2.7 *Замечание (критерий Коши бесконечного предела)* Функция  имеет бесконечный предел при  тогда и только тогда, когда для  такое, что из  следует .

**13.3 Односторонние пределы (по Коши)**

**М13.3.1. Определение.** Функция  *имеет левый предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



Наличие левого предела функции при  записывается равенством .

**М13.3.2** *Замечание.* Отличие определения левого предела от определения предела только в том, что у левого предела требуется условие , то есть, не задается вопрос о том, как ведет себя функция справа от точки 

**М13.3.3. Определение.** Функция  *имеет правый предел, равный  при ,* если для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство :



Наличие правого предела функции при  записывается равенством .

**М13.3.4** *Замечание.* Из определений предела, левого и правого пределов, следует, во-первых, что если функция имеет при  предел, равный , то левый и правый пределы этой функции при  существуют и каждый из них равен . Во-вторых, если левый и правый пределы этой функции при  существуют и каждый из них равен , то существует и предел этой функции при  и он равен .

**М13.3.5** *Замечание.* Из М13.3.4 следует, что если хотя бы один из односторонних пределов (левый или правый) не существует, или оба они существуют, но не равны между собой, тогда не существует и предел.

**13.4 Определение предела функции на языке последовательностей (по Гейне)**

Пусть  - предельная точка множества .

**М13.4.1 Определение.** Функция  *имеет предел, равный  при ,* если для любой последовательности  такой, что  выполняется равенство .

**М13.4.2 Теорема.** Определения предела по Коши и предела по Гейне равносильны.

*Доказательство.* 1. Пусть для любого положительного числа  существует положительное число  такое, что для любой точки  из неравенства  следует неравенство  и пусть . Надо показать, что найдется номер  такой, что для  выполняется неравенство .

Пусть задано число . тогда , удовлетворяющее определению предела по Коши. Для этого числа , в силу равенства  найдется  такой, что для  выполняется неравенство . Тогда, из определения предела по Коши сразу следует .

2. Пусть теперь для любой последовательности  такой, что  выполняется равенство  (то есть число  является пределом последовательности по определению Гейне). Предположим, что число  не является пределом функции  по определению Коши. Это значит, что существует число  такое, что для любого (в том числе, как угодно малого) найдется хотя бы одно значение , для которого , но .

Рассмотрим произвольную последовательность положительных чисел  такую, что . Для каждого числа  найдется значение , что , но . Из неравенств  и  следует, что . Но тогда, из неравенства  следует, что построенной последовательности  не выполняется условие «для любой последовательности  такой, что  выполняется равенство ». Противоречие. Теорема доказана.

**М13.4.3** *Замечание.* Теорема остается верной, если вместо  или(и) вместо  взять .

**М13.4.4** *Замечание.* Определения предела на языке последовательностей удобно использовать для доказательства того, что некоторый предел функции не существует.

**М13.4.5 Пример.** Доказать, что предел  не существует.

*Решение.* В соответствии с определением Гейне (М9.4.1) и единственностью предела последовательности (М2.1.10) достаточно показать, что существуют две последовательности  и  такие, что , но .

Положим , . Тогда , , . Что и требовалось.

**13.5 Бесконечно малые величины**

М13.5.1 Теорема (о пределе постоянной величины)

Предел постоянной величины равен самой этой величине: 

*Доказательство*: Пусть . Выберем , тогда в качестве  можно взять любое положительное число, т.к. . *Теорема доказана*.

М13.5.2 Определение: функция  называется *бесконечно малой величиной* при , если .

М13.5.3 Теорема (свойства бесконечно малых величин)

1. Если  и  - бесконечно малые величины при , то функция  также будет бесконечно малой величиной при .
2. Если  и  - бесконечно малые величины при , то функция  также будет бесконечно малой величиной при 
3. Если  - бесконечно малая величина при , а функция  - постоянная величина, то функция 

также будет бесконечно малой величиной при .

*Доказательство*: 1) Пусть выбрано число . Тогда, по определению предела для числа  найдется число  такое, что из  следует . Аналогично, для того же числа  найдется число  такое, что из  следует . Обозначим через  меньшее из чисел , (тогда из  будет следовать  и .

Значит, .

Таким образом, для произвольного числа  найдено , удовлетворяющее определению предела.

2) Пусть выбрано число . Тогда, по определению предела для числа  найдется число  такое, что из  следует . Аналогично, для того же числа  найдется число  такое, что из  следует . Обозначим через  меньшее из чисел , (тогда из  будет следовать  и .

Значит, .

3) Пусть выбрано число .

Тогда, по определению предела для числа  найдется число  такое, что из  следует .

. *Теорема доказана*.

М13.5.4 *Следствие1:* Если  и  - бесконечно малые величины при , то функция  также будет бесконечно малой величиной при .

Доказательство: . По части 3 теоремы М13.5.3 функция  является бесконечно малой величиной, по 1 части теоремы функция  тоже будет бесконечно малой величиной.

М13.5.5Следствие 2: Если , то , где  - бесконечно малая величина при .

М13.5.6 Определение: Говорят, что при функция  является *бесконечно малой величиной более высокого порядка*, чем функция , если  и .

(Этот факт обозначается , знак  читается «о малое»)

М13.5.7 Определение: Говорят, что при функции  и  являются *бесконечно малыми величинами одного порядка*, если  и .

(Этот факт обозначается , знак  читается «о большое»)

М13.5.8 Определение: Говорят, что при функции  и  являются *эквивалентными бесконечно малыми величинами*, если  и .

**13.6 Предел и арифметические операции**

М13.6.1 Теорема (предел и арифметические операции)

Если  и , то

1) 

2) 

3) 

4) , если 

*Доказательство*: 1) Поскольку  и , то  и , где  - бесконечно малые величины при .

, но, поскольку  - бесконечно малые величины при , то по теореме о свойствах бесконечно малых величин функция также является бесконечно малой величиной и по следствию из той же теоремы .

2) .

Функция  является бесконечно малой величиной и .

3) . Функция  по второй части теоремы о свойствах бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной, каждая из функций  и  по третьей части той же теоремы также является бесконечно малой величиной. По первой части той же теоремы функция  является бесконечно малой величиной, значит, .

4) Надо показать, что функция  является бесконечно малой величиной. . Числитель полученной дроби является бесконечно малой величиной и если , то знаменатель бесконечно малой величиной не является. Значит, вся дробь является бесконечно малой величиной. *Теорема доказана.*

**13.7 Предел и неравенства**

М13.7.2 Теорема (предел и неравенства)

Если  и , то:

1. Из  следует 
2. Из  следует 
3. Если ,  и , то найдется число  такое, что для  выполнится неравенство .

*Без доказательства*.

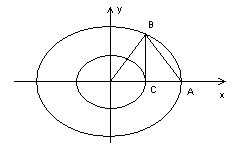
М13.7.3 Теорема (предел зажатой функции)

Если  и , то .

*Доказательство:* Поскольку , то для любого числа  найдутся числа  такие, что при  выполняется неравенство , а значит, и неравенство ; аналогично при выполнится неравенство . Тогда при  получим , значит,  или . *Теорема доказана*.

М13.7.4 Теорема (первый «замечательный» предел)



*Доказательство:* рассмотрим единичную окружность. Обозначим  - некоторый угол из промежутка , точка С – основание перпендикуляра, опущенного из точки В на ось абсцисс, D – точка пересечения отрезка ОВ и окружности радиуса ОС.

Обозначим  - площадь сектора DOC,  - площадь треугольника BOA,  - площадь сектора AOB.

Тогда ,

, . Поскольку , то . Поделим на х:

.

**,** поэтому по теореме о пределе «зажатой функции» **.**

13.8 Операции с символом . Понятие неопределенности

М13.8.1 Пусть , тогда, очевидно, . Этот факт запишем так: .

Аналогично можно записать: , , , , в зависимости от знака числа  и аналогично 

Если , то . Если , то , а если , то .

М13.8.2 Рассмотрим функции  и  и предел  . Очевидно, что  и поскольку в качестве  можно выбрать произвольное число, то выражение  может принимать различные значения и поэтому, в отличие от выражений , ,  однозначно не определено. Выражения такого типа принято называть *неопределенностями*. Кроме  неопределенностями также являются выражения , , , ,  и .

13.9 Предел монотонной функции

М13.9.1 Определение. Функция , определенная на числовом множестве  называется:

- *возрастающей*, если  из следует ;

- *убывающей*, если  из следует ;

- *невозрастающей*, если  из следует ;

- *неубывающей*, если  из следует .

Функции перечисленных типов называются *монотонными*, при этом функции двух первых типов называются *строго монотонными*.

М13.9.2 Определение. Функция , определенная на числовом множестве  называется:

- *ограниченной сверху*, если  такое, что ;

- *ограниченной снизу*, если  такое, что ;

М13.9.3 Теорема (предел монотонной ограниченной функции). Пусть числа (или символы )  и  являются предельными точками множества . Тогда: 1) Неубывающая функция имеет предел при  тогда и только тогда, когда она ограничена сверху; 2) Невозрастающая функция имеет предел при  тогда и только тогда, когда она ограничена снизу;

**13.10 Элементарные методы раскрытия неопределенностей**

**М13.10.1 Пример 1.**Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение.* а) Применим метод, рассмотренный в предыдущей лекции – поделим числитель и знаменатель на : ;

б) аналогично предыдущему поделим числитель и знаменатель на : .

**М13.10.2 Определение.** *Многочленом (полиномом) степени*  называется функция , где , .

**М13.10.3 Определение.** Число  называется *корнем многочлена* , если .

**М13.10.4 Теорема Безу (о делении многочлена без остатка)** Если число  является корнем многочлена , то этот многочлен делится без остатка на многочлен .

*Доказательство:* любой многочлен делится на любой другой с остатком, при этом (по определению деления с остатком) степень остатка меньше степени делителя. Значит, , где  - остаток. Остаток  является числом, поскольку степень остатка должна быть меньше степени многочлена .

Поскольку  является корнем многочлена , то , откуда , что и требовалось.

**М13.10.5 Пример 2.** Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение.* а) Подстановка числа  в функцию  приводит к неопределенности вида . Это, в частности, означает, что число  является корнем каждого из многочленов  и . Разложив эти многочлены на множители (второй корень элементарно определяется по теореме Виета), получим 

б) Подстановка числа  в функцию  также приводит к неопределенности вида . Это снова означает, что число  является корнем как числителя, так и знаменателя. По теореме Безу и числитель и знаменатель делятся на . Поделив числитель и знаменатель на  («уголком» или по схеме Горнера), получим .

**М13.10.6 Пример.** Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение.* а) Подстановка числа  под знак предела приводит к неопределенности вида . Избавимся от иррациональности в числителе: 

б) снова подстановкой числа  под знак предела получаем неопределенность . Избавимся от иррациональности в знаменателе: 



.

**13.11 «Замечательные» пределы**

**М13.11.1 Пример.** Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение*. а) ;

Рассмотрим предел . Сделаем замену . Тогда если , то и : . (воспользовались первым «замечательным» пределом). Аналогично . Значит, .

б) Сделаем замену переменной , тогда  и получим 

.

**М13.11.2 Пример.** Вычислить пределы: а) ; б) ;

*Решение.* а) . Сделаем замену , тогда ,  и . Получаем .

б) Сделаем замену переменной ,тогда  и .

**М13.11.3 Пример.** Доказать, что: а) ; б) ; в) .

*Решение.* а) ;

Заметим, что 

б) Сделаем замену . Тогда  и . Получим .

Заметим, что 

в) Обозначим , тогда  и . Заметим, что если , то и . Получим

.

**Контрольные вопросы:**

1. Какая точка называется предельной точкой множества? Дайте определение конечного предела на языке  (при стремлении переменной к конечному значению и при стремлении переменной к бесконечности).
2. Дайте определение бесконечного предела на языке  (при стремлении переменной к конечному значению и при стремлении переменной к бесконечности).
3. Сформулируйте критерий Коши существования конечного предела.
4. Дайте определения левого и правого пределов на языке .
5. Дайте определение предела на языке последовательностей. Сформулируйте теорему о равносильности определений пределов по Коши и по Гейне.
6. Что называется бесконечно малой величиной? Сформулируйте свойства бесконечно малых величин. Что такое «о малое» и «о большое»? Какие функции называются эквивалентными?
7. Сформулируйте теорему о пределе и арифметических операциях. Сформулируйте теорему о пределе и неравенствах. Сформулируйте теорему о пределе «зажатой» функции. Что называется первым «замечательным» пределом?
8. Какая функция называется возрастающей, невозрастающей, убывающей, неубывающей? Какая функция называется ограниченной сверху, ограниченной снизу? Сформулируйте теорему о пределе монотонной ограниченной функции.
9. Какая функция называется полиномом? Что называется корнем полинома? Сформулируйте теорему Безу.
10. Чему равны пределы ; ; 